

## Propriétés des suites convergentes

Thm Une suite convergente est bornée.

Preuve: Supposons  $a_n \rightarrow a$ . Prenons un  $\varepsilon > 0$  quelconque, par exemple  $\varepsilon = 4$ .

$\exists N > 0$  tel que  $\forall n \geq N, |a_n - a| < 4$ .

Donc  $|a_n| < 4 + |a| \quad \forall n \geq N$ .

Soit  $C = \max(|a_1|, |a_2|, \dots, |a_{N-1}|, 4 + |a|)$

$|a_n| < C \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow (a_n) \text{ est bornée}$   $\square$

Proposition Supposons  $a_n \rightarrow a$  et  $b_n \rightarrow b$ , alors

1)  $\lambda a_n \rightarrow \lambda a, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

2)  $a_n + b_n \rightarrow a + b$

3)  $a_n \cdot b_n \rightarrow a \cdot b$

4)  $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow \frac{a}{b}$

5)  $|a_n| \rightarrow |a|$

6)  $\sqrt{a_n} \rightarrow \sqrt{a} \quad (\text{si } a_n \geq 0)$

Preuve.

2) exercice facultatif (Série 6)

Exemple Trouver  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 - 1}{n^2 + 1}$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2(2 - \frac{1}{n^2})}{n^2(1 + \frac{1}{n^2})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{1}{n^2}}$$

Hors, comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$  on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2 - \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{1}{n^2}} = \frac{2 - (\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2})}{1 + (\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2})} = \frac{2}{1} = 2$$

Thm Si  $a_n \rightarrow a$ ,  $b_n \rightarrow b$  et  $\exists N \in \mathbb{N}^*$   
tel que  $a_n \leq b_n \forall n \geq N$ , alors  $a \leq b$

Preuve: Par l'absurde: supposons  
que  $a > b$  et prenons  $\varepsilon < |a-b|$

$\Rightarrow$  Comme  $a_n \rightarrow a$ ,  $\exists N$  tel que  
 $|a_n - a| < \varepsilon \forall n > N$

$\Rightarrow a_n > b \forall n > N$   $\swarrow \varepsilon$   $\left\{ \begin{array}{l} a \\ b \end{array} \right.$

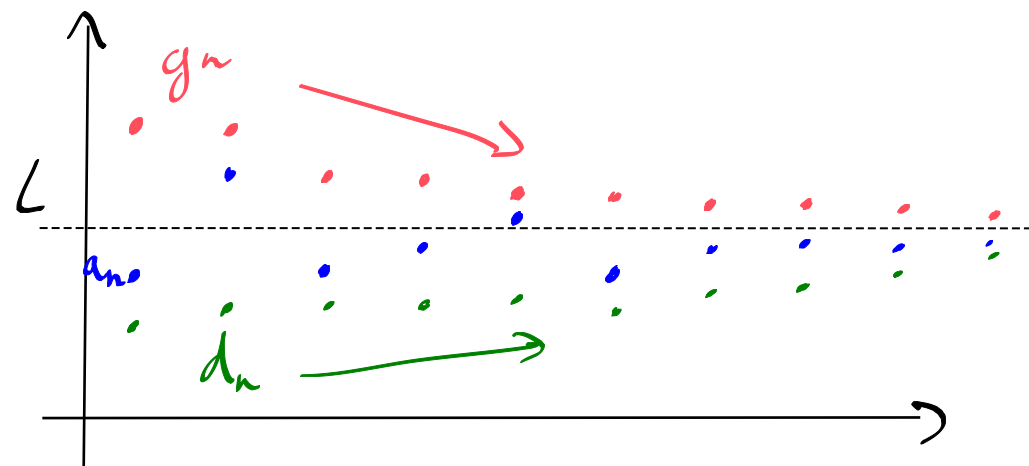
Thm (Théorème des 2 gendarmes)

Soit  $(a_n), (g_n), (d_n)$  telles que

-  $g_n \leq a_n \leq d_n \forall n$  assez grand

-  $g_n \rightarrow L, d_n \rightarrow L$

$\Rightarrow a_n \rightarrow L$



Preuve Soit  $\varepsilon > 0$ . On cherche  $N$   
tel que  $\forall n \geq N, |a_n - L| < \varepsilon$ .

1)  $\exists N_1$  tq  $\forall n \geq N_1, |g_n - L| < \varepsilon$

2)  $\exists N_2$  tq  $\forall n \geq N_2, |d_n - L| < \varepsilon$

3)  $\exists N_3$  tq  $\forall n \geq N_3, g_n \leq a_n \leq d_n$

Alors  $\forall n \geq N = \max(N_1, N_2, N_3)$ :

$L - \varepsilon \leq g_n \leq a_n \leq d_n \leq L + \varepsilon$

$\Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon \Rightarrow a_n \rightarrow L \quad \square$

Exemples ① Trouver la limite de

$$a_n = \frac{n+2}{n + \underbrace{\sin(\pi n/2)}}_{}$$

Comme la valeur de  $\sin$  est entre  $-1$  et  $1$   
on peut encadrer  $a_n$  par des gendarmes:

$$\frac{n+2}{n+1} \leq a_n \leq \frac{n+2}{n}$$

$$\begin{array}{c} \vee \\ \frac{n+1}{n+1} \end{array} \rightarrow 1$$

$$\frac{n(1+\frac{2}{n})}{n} = 1 + \frac{2}{n} \rightarrow 1$$

Donc, par le théorème des gendarmes,  
 $a_n \rightarrow 1$ .

② Trouver la limite de  $a_n = \frac{(n-1)^2}{n!}$

On remarque que

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{(n-1)^2}{n!} = \frac{(n-1)(n-1)}{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1} = \frac{n-1}{n(n-2) \cdots 2 \cdot 1} \\ &= \left(\frac{n-1}{n}\right) \cdot \frac{1}{n-2} \cdot \frac{1}{n-3} \cdots \frac{1}{2} \leq \frac{1}{n-2} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Hors  $a_n > 0 \forall n \in \mathbb{N}^*$ .

Donc un gendarme peut être juste 0!

$$\underbrace{g_n = 0}_{\downarrow 0} \leq a_n \leq d_n = \frac{1}{n-2} \quad \underbrace{\downarrow 0}$$

$$\Rightarrow a_n \rightarrow 0.$$

Corollaire Soit  $(a_n)$  une suite

$$|a_n| \rightarrow 0 \Rightarrow a_n \rightarrow 0$$

$$\text{Preuve } -|a_n| \leq a_n \leq |a_n|$$

$$\begin{array}{c} \downarrow 0 \\ -|a_n| \end{array} \leq a_n \leq \begin{array}{c} \downarrow 0 \\ |a_n| \end{array}$$

$$\Rightarrow a_n \rightarrow 0. \quad \square$$

Rem Si  $|a_n| \rightarrow a > 0$ , on peut  
rien dire pour  $(a_n)$ . Exemple:

$$a_n = (-1)^n, \quad (|a_n|) \text{ converge mais pas } (a_n)$$

Corollaire Soient  $(a_n)$  et  $(b_n)$  tel que  
 $a_n \rightarrow 0$  et  $(b_n)$  est bornée  
alors  $a_n b_n \rightarrow 0$ .

Preuve Comme  $(b_n)$  bornée, il  
existe  $C$  tel que  $|b_n| \leq C$ .

Donc

$$0 \leq |a_n b_n| = |a_n| |b_n| \leq C \cdot |a_n|$$

$\downarrow$   
0

$\downarrow$  car  $a_n \rightarrow 0$   
0

$\Rightarrow$  gendarmes :  $|a_n b_n| \rightarrow 0$

$$\Rightarrow a_n b_n \rightarrow 0$$

□

Exemple Trouve la limite de

$$a_n = \frac{\sin(n^2 + 7 \cos(n^2))}{n}$$

Alors,  $\sin(n^2 + 7 \cos(n^2))$  est bornée par  $-1$  et  $1$   
et  $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ . Donc  $a_n \rightarrow 0$ .

Dernier exemple Trouver la limite de

$$a_n = \sqrt{n^2 - n} - n$$

Le problème c'est qu'on a une différence  
entre 2 expressions dure à comparer.

On rationalise:

$$\begin{aligned} a_n &= \sqrt{n^2 - n} - n \cdot \frac{\sqrt{n^2 - n} + n}{\sqrt{n^2 - n} + n} \\ &= \frac{(n^2 - n) - n^2}{\sqrt{n^2 - n} + n} = \frac{-n}{\sqrt{n^2 - n} + n} \end{aligned}$$

Maintenant, on a une ratio entre 2  
expressions, on peut trouver la limite !



$$a_n = \frac{-n}{\sqrt{n^2 - n} + n} = \frac{n \cdot (-1)}{n(\sqrt{1 - \frac{1}{n}} + 1)}$$

$$= \frac{(-1)}{\sqrt{1 - \frac{1}{n}} + 1} \rightarrow \frac{-1}{2}$$

$\underbrace{\hspace{1.5cm}}$   
 $\downarrow$   
 $0$